湖南师范大学

论文指导教师评阅意见

<table>
<tr><td rowspan="2">学　生
姓　名</td><td rowspan="2">刘华林</td><td rowspan="2">年　级
专　业</td><td>2019</td><td rowspan="2">学号</td><td rowspan="2">201930075021</td></tr>
<tr><td>国际经济
与贸易</td></tr>
<tr><td>（论文）题目</td><td colspan="5">世界商品对关税限制的稳健性研究</td></tr>
<tr><td>指导教师</td><td>曹虹剑</td><td>教师职称</td><td colspan="3">教授</td></tr>
<tr><td>学
年
论
文
评
语</td><td colspan="5">评定成绩：______________

指导教师签名：____________

年　　　月　　　日</td></tr>
</table>

湖南师范大学商学院

论文

论文题目：世界商品对关税限制的稳健性研究

学生姓名：刘华林

学　　号：201930075021

年级专业：国际经济与贸易

指导老师：曹虹剑

完成时间：2021年12月21日

世界商品对关税限制的稳健性研究

刘华林 201930075021 国际经济与贸易

摘要： 世界商品是指各国消费者长期稳定消费的“稳健且最优”的商品，本文首先给出了传统的对商品、预算的数学定义，并对传统研究消费者偏好的定义做了拓展：偏好结构和无差异曲面，这些新定义便于处理多消费者多商品多偏好场景下的消费者最优购买决策问题。

随后基于这些定义了关税的数学形式，并得出多消费者多商品多偏好场景下消费者的无关税下、从量税下和从价税下的“效用—预算”向量方程组。为了研究新场景下的消费者最优商品决策问题，设计了一个二消费者三商品决策示例并发现新场景下传统的静态分析的效用最大化方法会产生消费者效用最大化决策的冲突，造成这些冲突的原因，以及符合传统结论的“征收关税带来效用减损”现象。

笔者发现不同商品购买组合间存在的等价性和对称性，引入购买数量批次化和置换群的方法，将偏好结构矩阵分解并与置换矩阵相乘发现，等效用的商品购买组合随批次细化和商品数量增多而迅速变多，这支持消费者在最优决策冲突的前提下寻求多个等效用的次优决策，然而这引入了对多个次优决策排序以选取最优的问题。

笔者视消费者对购物成本变动的高敏感为次优决策的首要因素，认为商品购买成本对价格频繁变动的稳定性（稳健性）是对多个次优决策评级排序的依据，基于此引入了两种对商品购买成本的微扰，市场微扰（需求数量增多）和关税微扰，发现市场微扰可以一定程度上和关税微扰相抵消，这种抵消效应取决于商品的价格弹性，较大的商品价格弹性可以带来更多的抵消效应，因此这类商品的购买成本较为稳定，成为消费者在多个候选购买决策中青睐的商品，涌现为“世界商品”。

关键词： 多消费者多偏好多商品决策场景　“效用—预算”最优化　消费决策对称性　抵消效应　抗关税　稳健性

目录：

六、结论与不足

参考文献索引

一、基础定义部分

1.商品定义：

定义 1 商品具有数量Q和价格P属性，除此之外是无区别的；

假设 1 对任意商品i，$\frac{dQ_i}{dP_i}=k_i\equiv$ *价格弹性*，本文假设商品的价格弹性不变，也即商品的数量和价格可以迅速调整，出于书写方便本文也用k_i表示商品对象。

约定商品的价格弹性向量$\vec{k}=(k_1,k_2,\cdots,k_m)$表征所有的商品对象。

2.偏好类型和偏好结构定义：

定义 2 消费者群体在宏观上会将商品归类为各种偏好类型，并在同一偏好类型自由选择商品组合，以超图结构表示为：商品集合$\mathrm{V}=\{\mathrm{k_i}|\mathrm{i}=1,2,\cdots,\mathrm{n}\}$，偏好类型是超图上的超边，即$\mathrm{E}=\{\mathrm{e_j}|\exists\mathrm{k_i}\in\mathrm{e_j},\mathrm{k_i}\notin\mathrm{e_k},\mathrm{j}\leq\mathrm{i},\mathrm{j}\neq\mathrm{k}\}$，超图$\mathrm{G}=(\mathrm{V},\mathrm{E})$表示商品与偏好类型的关联；

定义 3 一种如上的商品归类映射唯一确定一个偏好类型的超图，即$f_g\Leftrightarrow(V,E)_{g(g\in G)}$，称$f_g$或$(V,E)_{g(g\in G)}$为一个偏好结构，$f_g$为商品归类映射，G 为偏好结构（超图）的集合；

定义 4 消费者群体为微观消费者个体分配一定的偏好结构，表示为$f_G:l\to(V,E)_{g(g\in G)}$；

假设 2 这种商品归类映射完全覆盖了市场上所有的商品，即$\bigcup_{e_j\in E}=V$；

约定商品有v_m个（节点），偏好类型有e_n个（超边），有m行n列的超图矩阵 **H** 为超图的邻接矩阵：对于第i个节点，在 **H** 的第i行中第i个节点所属的超边对应的列位置的值标为 1，否则标为 0，因此可通过邻接矩阵 **H** 唯一刻画一个偏好结构。

值得一提的是，消费者群体不一定共享一种偏好结构，对消费者群体进行采样，随机得到的消费者个体属于某种偏好结构的概率为$\mathrm{P}\left(\mathrm{g_i}=\mathrm{f_G}(\mathrm{l_j})\right)\sim\mathrm{F_g}$，其中$\mathrm{F_g}$为偏好结构总体的概率分布函数；不同偏好结构（不同类别的消费者）的区别等价于这些偏好结构所对应的矩阵的差异。

3.预算和预算分布定义：

定义 5 微观消费者个体l具有一定的支付能力B_l，允许个体在偏好类型内选择若干商品组合，并且控制在支付能力内：$\sum_{i=1}^{m}Q_iP_i\leq B_l$；

定义 6 微观消费者个体l对各偏好类型分配一定的支付能力，表示为$f_B:e_j\to B_j$，函数f_B为偏好的预算分布，e_j为偏好类型（超边），B_j为对偏好类型分配的支付能力，$\sum B_j=B_l$；

定义 7 消费者群体为微观消费者个体分配一定的支付能力，表示为$f_L:l\to B_l(l\in L)$，函数f_L为个体的预算分布，l为消费者个体，B_l为该个体的支付能力，另外以B_L表示各个体支付能力的序列；

因此，消费者群体的预算特征就具有两个维度：在群体内各消费者个体支付能力的分布和消费者个体对不同的偏好类型支付能力分配权重的分布。

关于第一个维度，对消费者总体进行随机采样，随机得到的消费者个体具有某种支付能力的概率为$\mathrm{P}\left(\mathrm{B_i}=\mathrm{f_L}(\mathrm{l_i})\right)\sim\mathrm{F_b}$，其中$\mathrm{F_b}$为支付能力总体的概率分布函数；

关于第二个维度，消费者个体对不同偏好类型支付能力分配权重的分布， 每一类消费者对应一个偏好结构，而每个偏好结构所对应的偏好类型集合是不同的，这使从消费者角度描述偏好类型分配权重问题比较困难，但反过来，偏好类型数量的规模完全由商品数量确定，若有N个商品则最多有2^N-1个彼此不同的偏好类型，所以可以从偏好类型角度描述偏好类型的权重分布问题。

设所有偏好类型由二值向量$e=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ $(a_i=0,1,n$*为商品数*$)$确定，映射$f_B{}^{-1}$可将所有微观消费者个体l加总（再考虑个体内部差异问题过于复杂故忽略）的对该种偏好类型支付能力对应到该种偏好类型，即将这样的二值向量e对应到一个正实数。

进而可知，对偏好类型总体进行随机采样，随机得到的偏好类型具有某种支付能力数量的概率为 $\mathrm{P}(\mathrm{B_i}=$

$\mathrm{f_B}(\mathrm{e_i})\big)\sim\mathrm{F_e}$，其中$\mathrm{F_e}$为偏好类型总体的概率分布函数。

约定消费者有p个，消费者的支付能力向量为$\vec{l}=(l_1,l_2,\cdots,l_p)$表征所有微观消费者个体的支付能力，由于有$n$个偏好类型，故每个消费者的支付能力分配向量为$\overrightarrow{l_{i(1\sim p)}}=(e_1,e_2,\cdots,e_n)^T$，满足关系：

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}e_i=l_j\\ e_i\sim F_b\end{cases}$$

进而可设n行p列的矩阵 $\mathbf{L}$ 为使$\overrightarrow{l_{i(1\sim p)}}$表示$\vec{l}$各分量的向量组$\mathbf{L}=(\vec{l_1},\vec{l_2},\cdots,\vec{l_p})$，可使用向量组（矩阵）$\mathbf{L}$ 唯一刻画消费者群体的支付能力分布；矩阵$\mathbf{L}$的每一列各元素采样自分布F_b，每一行各元素采样自分布$\mathrm{F_e}$。

由此可知$\mathbf{H}\cdot\mathbf{L}$表示消费者群体中每个消费者对每种商品分配的支付能力，进而可重新表示定义 5：设置向量$\overrightarrow{1_m}$为m列各列值均为 1 的降维向量，有$\overrightarrow{1_m}\cdot\mathbf{H}\cdot\mathbf{L}$为$p$列的支付能力向量表示每个消费者对所有商品提供的支付能力。

4.无差异曲面定义：

定义 8 无差异曲面是无差异曲线概念的延伸，表示在$N(N\geq 2)$个商品内选择商品组合，效用相同的各商品组合连成的任意次曲面。

假设 5 无差异曲面仍满足边际技术替代率，因此，以所有坐标轴的正方向为渐近线，无差异曲面在这些坐标轴平面上的投影均向右下方倾斜，即$\frac{d^2Q_i}{dQ_j^2}>0(i\neq j)$；

假设 6 无差异曲面互不相交；

简单来说，无差异曲面就是多商品情形下的高维无差异曲线，要求任意两种商品均满足边际技术替代率递减的规律，对于本文，无差异曲面表述为偏好结构超图的无差异超边：消费者在同一个无差异超边内做出的商品选择组合带来的效用满足是相同的。

本文借鉴柯布—道格拉斯效用函数$U(x,y)=x^\alpha y^\beta(\alpha+\beta=1)$，假设商品为$v_i(i\leq m)$，购买商品的消费者对于消费这些商品享受程度的主观估计为$w_i(i\leq m)$，则有无差异曲面效用函数为$U(v_1,v_2,\cdots,v_i)=v_1^{w_1}v_2^{w_2}\cdots v_m^{w_m}\left(\sum_{i=1}^{m}w_i=1\right)$，消费者对商品给自己带来的满足感是不确定、具有随机性的，但仍假定w_i从某个未知的概率分布F_w采样得到，考虑到不同消费者的个体效应，满足感由条件概率分布$P(F_w|l)$采样获得。

出于计算方便，将无差异曲面效用函数对数化为$\ln U=\sum_{i=1}^{m}w_i\ln v_i$，并将偏好结构邻接矩阵 $\mathbf{H}$ 改为偏好结构赋权矩阵$\mathbf{H}^*$，$\mathbf{H}^*$的每一列为一个偏好类型，为不同商品分配的满足感主观估计（仅对该项不为零的作分配，也即在偏好类型的超边内的才分配）。

对任一消费者l，设其对m种商品分别购买$x_i(i\leq m)$个，该消费者的偏好结构共包含n个偏好类型，可由$\mathbf{H}^*$表示其偏好结构赋权。因此向量$\ln\mathbf{x}\cdot\mathbf{H}^*$表示消费者在每一个偏好类型上取得的满足感（效用）。

消费者同时存在多个偏好类型，假设消费者对每个偏好类型的边际效用是常数，则消费者总效用可表示为各偏好类型的分效用的加权和。

由于不同偏好类型都可被同一个二值向量$e=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 编码，故可仿照前文有关偏好类型与支付能力分配关系的讨论，定义函数$\mathrm{F_W}$为偏好类型总体的效用权重分布函数，$\mathrm{P}\big(\mathrm{W_i}=\mathrm{f_W}(\mathrm{e_i})\big)\sim\mathrm{F_W}$，其中$\mathrm{W_i}$为对总效用$\sum U$求和时各偏好类型的权重，$\sum U=\sum_{i=1}^{n}W_iU_i$。

本文认为关税限制会通过作用于预算约束影响消费者的商品购买决策，但这种影响会随偏好的丰富性和商品的多样性而走向失效，接下来引入本文对关税项的构造。

5.关税定义：

定义 9 已知消费者有 p 个，假设有 q（p>>q）个关税联盟，每个关税联盟具有对 m 个商品的征税价目表，用矩阵$\mathbf{T}$表示 m 行 q 列的征税矩阵，课税计算可采取按量计征$\mathbf{T}_Q$或按价计征$\mathbf{T}_P$。其中按量计征的每一项表示每增加$\mathbf{T}_Q$数目的商品就增加征收一单位的价格，按价计征的每一项表示商品价格乘以$(1+\mathbf{T}_P)$。

从量税借助商品数量Q_i影响消费者决策：$P_i=\frac{1}{k_i}\cdot Q_i+\frac{Q_i}{T_Q}(\mathbf{T}_Q>1)$，消费者所额外负担的税收价格为：$\frac{Q_i}{\mathbf{T}_Q}$，税收成本对消费者免税购物成本的比例为$\frac{k_i}{\mathbf{T}_Q}$。

从价税借助商品价格P_i影响消费者决策：$P_i=\frac{1}{k_i}\cdot Q_i\cdot(1+\mathbf{T}_P)(\mathbf{T}_P>0)$，消费者所额外负担的税收价格为$\frac{1}{k_i}\cdot Q_i\cdot\mathbf{T}_P$，税收成本对消费者免税购物成本的比例为$\frac{\mathbf{T}_P}{1+\mathbf{T}_P}$。

6.世界商品定义：

世界商品是指各关税联盟/国家内的消费者群体长期稳定消费的商品，对每个个体消费者而言，这类商品必须具有抗关税变动的在“效用—预算”最优解上的稳健性，也即消费者已确定好的最优购买决策，其中分配到该类商品上的购买数量不会因为关税变动而剧烈变动。这种稳健性是相对而言的：

$$\begin{cases}U(Q^*)|_{\mathbf{T}>0}\approx U(Q^*),C(Q^*)|_{\mathbf{T}>0}\approx C(Q^*)\\ U(Q)|_{\mathbf{T}>0}<U(Q),C(Q)|_{\mathbf{T}>0}>C(Q)\end{cases}$$

这里Q^*表示世界商品，Q表示普通商品，$C(\cdot)$表示购买的成本函数。世界商品对提升一定量的关税，仍然能维持效用基本不变和成本轻微浮动，这是世界商品和普通商品的基本区别。

本文的研究核心为：商品的何种性质能使其成为世界商品，这种性质是如何减小关税对“效用—预算”最优解的扭曲效果的。

二、多消费者多偏好多商品场景下传统的“效用—预算”最优解不适用

1.“效用—预算”最优解分析

本文假设消费者国内市场对关税调整是迅速的，因此消费者会根据每个不同的关税矩阵调整所消费的商品组合。考虑一种极端情况：世界市场上各关税同盟壁垒极少，关税影响可以忽略不计，则每个理性消费者均争取效用最大化和成本最小化。

$$\begin{cases}\dfrac{dU}{d\vec{Q}}=0\\ \dfrac{1}{\vec{k}}\cdot\dfrac{d\vec{Q}\vec{Q}^T}{d\vec{Q}}=0\end{cases}(\mathbf{T}\approx\mathbf{0})$$

然而，假设世界市场上的关税同盟充分多产生了足以扭曲消费者决策的税收成本效应，关税影响不可忽略必须加入理性消费者的决策因素：

$$\begin{cases}\dfrac{dU}{d\vec{Q}}=0\\ \left(\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{T}}+\dfrac{1}{\vec{k}}\right)\dfrac{d\vec{Q}\vec{Q}^T}{d\vec{Q}}=0\end{cases}(\mathbf{T}>\mathbf{0},\mathbf{T}=\mathbf{T}_Q)$$

$$\begin{cases}\dfrac{dU}{d\vec{Q}}=0\\ \dfrac{1}{\vec{k}}\cdot(1+\mathbf{T}_P)\dfrac{d\vec{Q}\vec{Q}^T}{d\vec{Q}}=0\end{cases}(\mathbf{T}>\mathbf{0},\mathbf{T}=\mathbf{T}_P)$$

考虑一个简单的消费者购物决策情形，市面上有三种商品，数量分别为Q_1,Q_2,Q_3，即向量$\vec{Q}=(Q_1,Q_2,Q_3)$，消费者有两类$\vec{L}=(L_1,L_2)$，由于商品总共三种故最多存在 7 个偏好类型的偏好结构矩阵 $\mathbf{H}$：

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&0&0&0\\1&1&0&0&1&1&0\\1&0&1&0&1&0&1\end{bmatrix}$$

我们使两个消费者各具备 3 个偏好类型，其中L_1具有(e_2,e_3,e_4)，L_2具有(e_2,e_5,e_6)，并且有 1 个公共偏好类型，进而得到$\vec{L}$的偏好结构矩阵$\mathbf{H}$组：

$$\mathbf{H}(\vec{L})=\left(\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&1\\0&1&0\end{bmatrix}\right)$$

不同消费者对不同商品的主观满足感估计服从$P(F_w|l)$，这里我们假设两个消费者是同质的，即$P(F_w|L_1)=P(F_w|L_2)$，且消费者从不同商品取得的满足感没有差异，服从均匀分布，即$F_w=\{U(n)|n=1,2,3\}$，并从F_w得到主观权重值的采样，可得$\vec{L}$的偏好结构赋权矩阵$\mathbf{H}^*$组：

$$\mathbf{H}^*(\vec{L})=\left(\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1\\ \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}\right)$$

假设消费者L_1的购买向量为$\overrightarrow{X_1}=(X_1,X_2,X_3)$，则消费者$L_2$的购买向量为$\overrightarrow{X_2}=(Q_1-X_1,Q_2-X_2,Q_3-X_3)$，可得$\vec{L}$的效用满足向量$\vec{U}$组：

$$\vec{U}=\left(\left[\frac{1}{2}\ln X_1X_2\quad \frac{1}{2}\ln X_1X_3\quad \ln X_1\right],\left[\frac{1}{2}\ln(Q_1-X_1)(Q_2-X_2)\quad \frac{1}{2}\ln(Q_2-X_2)(Q_3-X_3)\quad \ln(Q_2-X_2)\right]\right)$$

对消费者L_1，求总效用$\sum U$，$\mathrm{F_W}$取均匀分布（各偏好类型的边际效用是均等的），则有：

$$\sum U=\frac{1}{2}\ln X_1X_2+\frac{1}{2}\ln X_1X_3+\ln X_1$$

我们使消费者的支付能力向量为$\vec{B}=(B_1,B_2)$，B_i表示消费者对所有偏好类型提供的总支付能力。购买商品支付的费用应该不高于总支付能力B_i。

购买商品的费用分两种情形：无关税情形的$\sum P_iQ_i$；有关税情形的$\sum\left(P_iQ_i+P_iQ_i/\mathbf{T}_Q\right)$或$\sum P_i(1+\mathbf{T}_P)Q_i$。对于无关税情形，$\frac{dP_i}{dQ_i}=\frac{1}{k_i}$，以$k_i^{-1}$表示$\frac{1}{k_i}$，则有总费用：

$$C=\vec{k}^{-1}\overrightarrow{Q}\overrightarrow{Q}^T$$

对消费者L_1，L_2，分别有$C_1=\vec{k}^{-1}\overrightarrow{X_1}\overrightarrow{X_1}^T$，$C_2=\vec{k}^{-1}\overrightarrow{X_2}\overrightarrow{X_2}^T$，消费者支付能力对购买数量的约束表示为：

$$\begin{cases}\vec{k}^{-1}\overrightarrow{X_1}\overrightarrow{X_1}^T=B_1\\ \vec{k}^{-1}\overrightarrow{X_2}\overrightarrow{X_2}^T=B_2\end{cases}$$

特别地，对消费者L_1，有$k_1^{-1}X_1^2+k_2^{-1}X_2^2+k_3^{-1}X_3^2-B_1=0$，为消费者$L_1$的预算约束方程。

由消费者L_1的总效用方程和预算约束方程可得：

$$\begin{cases}\sum U=\frac{1}{2}\ln X_1X_2+\frac{1}{2}\ln X_1X_3+\ln X_1\\ k_1^{-1}X_1^2+k_2^{-1}X_2^2+k_3^{-1}X_3^2-B_1=0\end{cases}$$

为求总效用最大化，设计拉格朗日函数：

$$L(X_1,X_2,X_3,\lambda)=\frac{1}{2}\ln X_1X_2+\frac{1}{2}\ln X_1X_3+\ln X_1+\lambda\left(k_1^{-1}X_1^2+k_2^{-1}X_2^2+k_3^{-1}X_3^2-B_1\right)$$

使该函数对X_1,X_2,X_3,λ分别求偏导得到方程组：

$$\begin{cases}\frac{\partial L(X_1,X_2,X_3,\lambda)}{\partial X_1}=\frac{2\lambda}{k_1}X_1+\frac{2}{X_1}=2\left(\lambda X_1^2+k_1\right)/k_1X_1=0①\\ \frac{\partial L(X_1,X_2,X_3,\lambda)}{\partial X_2}=\frac{2\lambda}{k_2}X_2+\frac{1}{2X_2}=\left(4\lambda X_2^2+k_2\right)/2k_2X_2=0②\\ \frac{\partial L(X_1,X_2,X_3,\lambda)}{\partial X_3}=\frac{2\lambda}{k_3}X_3+\frac{1}{2X_3}=\left(4\lambda X_3^2+k_3\right)/2k_3X_3=0③\\ \frac{\partial L(X_1,X_2,X_3,\lambda)}{\partial\lambda}=\frac{k_2k_3X_1^2+k_1k_3X_2^2+k_1k_2X_3^2-k_1k_2k_3B_1}{k_1k_2k_3}=0④\end{cases}$$

根据①②③得到$k_1=-\lambda X_1^2,k_2=-4\lambda X_2^2,k_3=-4\lambda X_3^2$，代入④有$\lambda=-\frac{3}{2B_1}$，再重新分别代入①②③有：

$$\begin{cases} X_1 = \sqrt{\frac{2}{3}k_1B_1} \\ X_2 = \sqrt{\frac{1}{6}k_2B_1} \\ X_3 = \sqrt{\frac{1}{6}k_3B_1} \end{cases}$$

因此，在不限制商品总量$\vec{Q}$的前提下，可得消费者L_1的最优商品购买组合为$\overrightarrow{X_1^*} = \left(\sqrt{\frac{2}{3}k_1B_1}, \sqrt{\frac{1}{6}k_2B_1}, \sqrt{\frac{1}{6}k_3B_1}\right)$。接下来尝试引入消费者$L_2$对消费者$L_1$的限制商品总量的效应，以讨论动态环境下的最优商品组合性质。

2.多消费者情景下“效用—预算”最优解冲突情况分析

仿照$\sum U_{L_1}$对消费者L_2求总效用$\sum U$，$\mathrm{F_W}$仍然取均匀分布（各偏好类型的边际效用是均等的），则有：

$$\sum U = \frac{1}{2}\ln(Q_1 - X_1)(Q_2 - X_2) + \frac{1}{2}\ln(Q_2 - X_2)(Q_3 - X_3) + \ln(Q_2 - X_2)$$

同时考虑无关税情形下的消费者L_2预算约束方程：

$$k_1^{-1}(Q_1 - X_1)^2 + k_2^{-1}(Q_2 - X_2)^2 + k_3^{-1}(Q_3 - X_3)^2 - B_2 = 0$$

为使消费者L_2效用最大化，根据总效用方程和预算约束方程设计拉格朗日函数：

$$\begin{aligned} L(X_1, X_2, X_3, \lambda) = {} & \frac{1}{2}\ln(Q_1 - X_1)(Q_2 - X_2) + \frac{1}{2}\ln(Q_2 - X_2)(Q_3 - X_3) + \ln(Q_2 - X_2) \\ & + \lambda\left(k_1^{-1}(Q_1 - X_1)^2 + k_2^{-1}(Q_2 - X_2)^2 + k_3^{-1}(Q_3 - X_3)^2 - B_2\right) \end{aligned}$$

使该函数对X_1, X_2, X_3, λ分别求偏导得到方程组：

$$\begin{cases} \frac{\partial L(X_1, X_2, X_3, \lambda)}{\partial X_1} = \frac{2\lambda}{k_1}(X_1 - Q_1) + \frac{1}{2(X_1 - Q_1)} = \left(4\lambda(X_1 - Q_1)^2 + k_1\right)/2k_1(X_1 - Q_1) = 0 \text{①} \\ \frac{\partial L(X_1, X_2, X_3, \lambda)}{\partial X_2} = \frac{2\lambda}{k_2}(X_2 - Q_2) + \frac{2}{X_2 - Q_2} = 2\left(\lambda(X_2 - Q_2)^2 + k_2\right)/k_2(X_2 - Q_2) = 0 \text{②} \\ \frac{\partial L(X_1, X_2, X_3, \lambda)}{\partial X_3} = \frac{2\lambda}{k_3}(X_3 - Q_3) + \frac{1}{2(X_3 - Q_3)} = \left(4\lambda(X_3 - Q_3)^2 + k_3\right)/2k_3(X_3 - Q_3) = 0 \text{③} \\ \frac{\partial L(X_1, X_2, X_3, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{k_2k_3(X_1 - Q_1)^2 + k_1k_3(X_2 - Q_2)^2 + k_1k_2(X_3 - Q_3)^2 - k_1k_2k_3B_2}{k_1k_2k_3} = 0 \text{④} \end{cases}$$

联立①②③得到$k_1 = -4\lambda(X_1 - Q_1)^2, k_2 = -\lambda(X_2 - Q_2)^2, k_3 = -4\lambda(X_3 - Q_3)^2$，代入④有与消费者$L_1$相同的结果：$\lambda = -\frac{3}{2B_2}$，再重新分别代入①②③可以得到$L_2$的最优商品购买组合$\overrightarrow{X_2^*}$满足的条件：

$$\begin{cases} X_1 = Q_1 - \sqrt{\frac{1}{6}k_1B_2} \\ X_2 = Q_2 - \sqrt{\frac{2}{3}k_2B_2} \\ X_3 = Q_3 - \sqrt{\frac{1}{6}k_3B_2} \end{cases}$$

结合消费者L_1的最优商品组合，可观察到消费者L_2的最优商品组合使L_2获得$\vec{Q}$中最优的部分，并使消费者L_1获得剩余的部分，该结论对消费者L_1同样成立。故可知L_1, L_2在取得效用—预算最优解的问题上存在冲突。以消费者L_1为例，将最优商品购买组合$\overrightarrow{X_1^*}$代入到$\sum U_{L_1}$可得：

$$\sum U\left(\overrightarrow{X_1^*}\right) = \frac{1}{2}(\ln 2 - 3\ln 3) + \frac{3}{2}\ln B_1 + \ln k_1 + \frac{1}{4}\ln k_2 + \frac{1}{4}\ln k_3$$

另将L_2的最优商品购买组合$\overrightarrow{X_2^*}$满足的条件代入到$\sum U_{L_1}$得到：

$$\sum U\left(\overrightarrow{X_2^*}\right)=2\ln\left(Q_1-\sqrt{\frac{1}{6}k_1B_2}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(Q_2-\sqrt{\frac{2}{3}k_2B_2}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(Q_3-\sqrt{\frac{1}{6}k_3B_2}\right)$$

重新整理$\sum U\left(\overrightarrow{X_2^*}\right)$表达式得到：

$$\sum U\left(\overrightarrow{X_2^*}\right)=-\left(\frac{3}{2}\ln 3+\ln 2\right)+\frac{3}{2}\ln B_2+2\ln\left(\frac{\sqrt{6}Q_1}{\sqrt{B_2}}-\sqrt{k_1}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{3}Q_2}{\sqrt{2B_2}}-\sqrt{k_2}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{6}Q_3}{\sqrt{B_2}}-\sqrt{k_3}\right)$$

使$\left|\sum U\left(\overrightarrow{X_1^*}\right)-\sum U\left(\overrightarrow{X_2^*}\right)\right|$得到消费者$L_1$对$L_2$的效用最优化冲突的大小$\Delta U$：

$$\Delta U=\left|\frac{3}{2}\ln 2+\frac{3}{2}\ln\frac{B_1}{B_2}+2\ln\frac{\sqrt{k_1}}{\frac{\sqrt{6}Q_1}{\sqrt{B_2}}-\sqrt{k_1}}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{k_2}}{\frac{\sqrt{3}Q_2}{\sqrt{2B_2}}-\sqrt{k_2}}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{k_3}}{\frac{\sqrt{6}Q_3}{\sqrt{B_2}}-\sqrt{k_3}}\right|$$

ΔU主要分三项：常数项$\Delta U(c)$，支付能力比例项$\Delta U(b)$以及各商品弹性项$\Delta U(e)$。

由于消费者L_1, L_2的偏好结构赋权矩阵$\mathbf{H}^*$不同（$\mathbf{H}^*$的差异包括偏好结构差异$\mathrm{F_g}(L_1)\neq\mathrm{F_g}(L_2)$或主观权重值$\mathrm{F_w}$采样差异），常数项$\Delta U(c)$不为零，对$L_1, L_2$的效用最优化冲突做正贡献，这反映偏好结构的差异引起效用最优化冲突，可能只需存在偏好结构差异即可引起消费者购买决策彼此冲突，偏离双方的静态最优点。

支付能力比例项$\Delta U(b)$衡量了消费者L_1, L_2的支付能力差异对L_1, L_2的效用最优化冲突的贡献，对于消费者L_1，如果其支付能力$B_1>B_2$，将提高L_1对L_2的效用最优化冲突，反之，将减小L_1对L_2的效用最优化冲突。

ΔU的各个商品的弹性项总计为$\Delta U(e)$，将其重新变形为以下的形式：

$$\Delta U(e)=-\frac{1}{2}\left[4\ln\left(\frac{\sqrt{6}Q_1}{\sqrt{k_1B_2}}-1\right)+\ln\left(\frac{\sqrt{3}Q_2}{\sqrt{2k_2B_2}}-1\right)+\ln\left(\frac{\sqrt{6}Q_3}{\sqrt{k_3B_2}}-1\right)\right]$$

分别设置子弹性项α,β,γ表示$\Delta U(e)$中的三个对数项以重写$\Delta U(e)$的表达式：

$$\alpha=\frac{Q_1}{\sqrt{\frac{k_1B_2}{6}}}-1,\beta=\frac{Q_2}{\sqrt{\frac{2k_2B_2}{3}}}-1,\gamma=\frac{Q_3}{\sqrt{\frac{k_3B_2}{6}}}-1$$

$$\Delta U(e)=-\frac{1}{2}[4\ln\alpha+\ln\beta+\ln\gamma]$$

子弹性项α,β,γ计算Q_i对$\sqrt{k_iB_l}$（商品总量比商品弹性和消费者支付能力）的数量关系，若子弹性项大于一，则会减小消费者个体间的效用最优化冲突，反之若子弹性项小于一，则会提升消费者个体间的效用最优化冲突。不同子弹性项对效用最优化冲突的贡献的权重也不同，可以满足更多偏好类型的商品的子弹性项，对于本文所展示的消费者L_1个例是α，相比其他子弹性项，对效用最优化冲突空间的大小占有高比例的贡献，α的提高会大幅缩小效用最优化的冲突空间，反之α的降低会大幅扩大效用最优化的冲突空间。

以上是无关税情形下的消费者L_1, L_2效用最优化的条件和冲突，及使L_1, L_2最大化效用产生冲突的若干因素。接下来考虑有税收情形的最优化问题。

3.加征关税情形下消费者最大效用减损分析

消费者L_1预算约束方程，对从价税和从量税分别有总费用表达式：

$$\begin{cases}C=\left(\vec{\mathbf{T}}^{-1}+\vec{k}^{-1}\right)\overrightarrow{Q}\overrightarrow{Q}^T,(\mathbf{T}>\mathbf{0},\mathbf{T}=\mathbf{T}_Q)\\C=\vec{k}^{-1}\left(\vec{\mathbf{T}}+1\right)\overrightarrow{Q}\overrightarrow{Q}^T,(\mathbf{T}>\mathbf{0},\mathbf{T}=\mathbf{T}_P)\end{cases}$$

首先考虑从量税，从量税只是将$\vec{k}^{-1}$乘项改写为了$\vec{\mathbf{T}}^{-1}+\vec{k}^{-1}$，只需要对消费者$L_1$方程中有关的$\vec{k}^{-1}$项进行修改即可，例如对消费者$L_1$的最高效用，在商品总量无限制前提下可以得到：

$$\sum U\left(\overrightarrow{X_1^*}\right)=\frac{1}{2}(\ln 2-3\ln 3)+\frac{3}{2}\ln B_1+\ln\left(\frac{k_1}{1+\frac{k_1}{T_1}}\right)+\frac{1}{4}\ln\left(\frac{k_2}{1+\frac{k_2}{T_2}}\right)+\frac{1}{4}\ln\left(\frac{k_3}{1+\frac{k_3}{T_3}}\right)$$

其次考虑从价税，从价税将$\vec{k}^{-1}$乘项改写为$\vec{k}^{-1}(\vec{\mathbf{T}}+1)$，仿照从量税的代换处理即可，作为示例，这里写出消费者L_1在商品总量无限制前提下得到的最高效用：

$$\sum U\left(\overrightarrow{X_1^*}\right)=\frac{1}{2}(\ln 2-3\ln 3)+\frac{3}{2}\ln B_1+\ln\left(\frac{k_1}{1+T_1}\right)+\frac{1}{4}\ln\left(\frac{k_2}{1+T_2}\right)+\frac{1}{4}\ln\left(\frac{k_3}{1+T_3}\right)$$

简单比较从量税和从价税情形下的消费者L_1最高效用，以及无关税情形下的消费者L_1最高效用，发现无论是设置从量税还是从价税都会减小消费者L_1可获得的最高效用。并且，若$k_i>T_i^2$，从量税相比从价税会对消费者L_1可获得的最高效用带来更大的减扣，反之若$k_i<T_i^2$，从价税相比从量税会对消费者L_1可获得的最高效用带来更大的减扣。

在本文中，由于消费者总是意图在预算约束内获取尽量高的效用，故即使是减扣了消费者可获得的最高效用也是重要的基本性质。前文在讨论效用最优化冲突空间的大小问题时，提到了商品所占有的偏好类型的数量对消费者产生最优化效用的冲突的重要影响：可以满足更多偏好类型的商品的子弹性项，相比其他子弹性项，对效用最优化冲突空间的大小占有高比例的贡献。

三、多消费者多偏好多商品场景下存在多个次优购买决策的新性质

1.多消费者情形下消费者个体的次优购买决策分析

前文讨论的最优化效用冲突实际上是单个消费者的静态效用最优化分析转移至多个消费者的动态效用最优化分析的场景时，静态方法不再适用所产生的冲突。

影响该种冲突的大小的因素实际上是多个消费者动态地最大化效用时所涌现的新条件，例如本文所展示的消费者L_1个例的最高权重的子弹性项α，很大的α会使多个消费者彼此的干扰、博弈变得很小，从而将多消费者场景近似退化为多个独立的单个消费者场景；很小的α会使多个消费者彼此的干扰、博弈变得很小，从而使多消费者场景变得极其复杂，每个消费者的购物选择都必须充分考虑其他消费者的影响。

鉴于商品所占有的偏好类型的数量对消费者产生最优化效用的冲突的重要影响，重新考虑$\vec{L}$的偏好结构赋权矩阵$\mathbf{H}^*$组，包含消费者L_1,L_2的偏好结构，以及消费者L_1,L_2的总效用函数：

$$\mathbf{H}^*(\vec{L})=\left(\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\\\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\\0&\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{cases}\sum U_{L_1}=\frac{1}{2}\ln X_1X_2+\frac{1}{2}\ln X_1X_3+\ln X_1\\\sum U_{L_2}=\frac{1}{2}\ln(Q_1-X_1)(Q_2-X_2)+\frac{1}{2}\ln(Q_2-X_2)(Q_3-X_3)+\ln(Q_2-X_2)\end{cases}$$

考虑$\sum U_{L_1}$的构成项，对换X_2与X_3不会影响效用总和，即$\overrightarrow{X_1}=(X_1,X_2,X_3)$和$\overrightarrow{X_1}=(X_1,X_3,X_2)$对$\sum U_{L_1}$没有差异，但对换$X_1$与$X_2$或$X_3$就会影响效用总和，考虑到不同对换的差异，设置换：

$$P=\begin{pmatrix}X_i,X_j,X_k\\X_a,X_b,X_c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i,j,k\\a,b,c\end{pmatrix}$$

置换P可以将$\overrightarrow{X_1}$各分量的数值进行对换，例如$P_1=\binom{2,3,1}{1,2,3}$将$\overrightarrow{X_1}=(X_2,X_3,X_1)$各分量数值的位置重新调整为$\overrightarrow{X_1}=(X_1,X_2,X_3)$，设$P_1=\binom{1,2,3}{1,3,2}$，有$U\left(P_1\left(\overrightarrow{X_1}\right)\right)=U\left(\overrightarrow{X_1}\right)$，因此置换$P_1$对$\overrightarrow{X_1}$是保效用的。

为了更细致地刻画更改不同商品购买量的分配的影响，考虑到商品是按批购买的离散购买交易而非连续的购买交易，将购买向量扩张为增广购买向量，使向量的每一列为一批商品。每一批商品的购买数量取决于同一个商品有多少购买批次，本文不考虑不同商品分不同数目的购买批次进行购买，而设定所有商品共享同一个购买批次。例如，上文已示例的置换P_1是一次批置换，可以扩张为P_1^2或P_1^3的高次批置换：

$$P_1^2=\begin{pmatrix}1,1,2,2,3,3\\1,1,3,3,2,2\end{pmatrix},P_1^3=\begin{pmatrix}1,1,1,2,2,2,3,3,3\\1,1,1,3,3,3,2,2,2\end{pmatrix}$$

高批次置换可以更细致地分析更改分配给不同商品的购买量会产生的影响，在得到可能存在的更优分配方案后可将P_1^N置换每 N 列相加合并，降维为一次批置换，并约定 m 个商品上的置换为P_m^N置换。

2.基于置换群和对称性的消费者个体的次优购买决策分析

显然，对于 3 个商品的购买向量$\overrightarrow{X_1}$，其上的一次批置换P_3^1构成置换群，群是一个包含集合和一种特殊运算的数学结构，这种特殊运算使得集合内的元素通过这个特殊运算满足封闭性、结合性和可逆性，并存在单位元是所有元素与其逆元素通过这个特殊运算得到的结果。

对一次批置换P_3^1，由于其有三个元素，根据全排列法则共有 3!种排列，即 6 种排列，可知P_3^1群共有 6 个置换，一般地，对高次批置换群P_m^N，其存在$m\times N$个元素，有$(m\times N)!$种排列，P_m^N具有$(m\times N)!$个置换。

$$\sum U=\ln\mathbf{x}\cdot\mathbf{H}^*\cdot\vec{1}^T=\ln P^*(\mathbf{x})\cdot\mathbf{H}^*\cdot\vec{1}^T$$

其中P^*为保效用置换，由于函数$\ln(\cdot)$为双射，并且可视P^*为施加在向量$\mathbf{x}$上的列变换矩阵，故有：

$$\sum U=\ln\mathbf{x}\cdot P^*\cdot\mathbf{H}^*\cdot\vec{1}^T=\ln\mathbf{x}\cdot(P^*\cdot\mathbf{H}^*)\cdot\vec{1}^T$$

假设置换P^*为对换，即交换某两列向量数值的位置，则P^*可表示为初等列变换矩阵：

$$P^*=\begin{pmatrix}1 & & \cdots & & 0\\ \vdots & \begin{bmatrix}0 & \cdots & 1(i)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \cdots & 0(j)\end{bmatrix} & & & \vdots\\ 0 & & \cdots & & 1\end{pmatrix}$$

其中$(i)(j)$表示交换$\mathbf{x}$的第i列和第j列，$(P^*\cdot\mathbf{H}^*)$借助矩阵运算的结合律将P^*变为矩阵$\mathbf{H}^*$的行变换矩阵。

前文已提到，P_m^N为置换群，群运算满足封闭性与结合性，故任意次置换相结合仍是一个P_m^N上的置换。这里介绍置换的基本分类，若置换P满足：

$$P(X_1)=X_2,P(X_2)=X_3,P(X_{r-1})=X_r,P(X_r)=X_1$$
$$\forall X_i\notin\{X_1,X_2,\cdots,X_r\},P(X_i)=X_i$$

称这样的置换P为循环/轮换置换，其中r为循环置换的长度。特别地，对于本文已示例的$P_1=\binom{2,3,1}{1,2,3}$为长度为 2 的循环置换，称为对换。若两个置换P_i,P_j所置换的列的集合不相交，则称P_i,P_j相互独立。

引入置换群上的若干定理：(1)相互独立的循环置换的连乘是可交换的(2)任意置换P_i可唯一地表示为相互独立的循环置换的连乘；(3)任意置换P_i可表示为若干个对换的乘积。由(3)可知由一系列连乘的对换矩阵表示可表示任意置换P_i，因为任意置换P_i总可表示为若干个互独立的循环置换的连乘，而每个循环置换均可分解为更小的循环置换直至长度为 2 的对换，该种置换分解的计算复杂度为$O(n^2)$。

3.基于置换矩阵、偏好矩阵分解和矩阵变换的不变性：消费者个体的次优购买决策分析

使$\mathbf{P}$表示各对换矩阵最终的连乘，由于每个对换矩阵为$m\times m$的 0-1 矩阵，故$\mathbf{P}$仍为$m\times m$的 0-1 矩阵。假设分批次数N为 2 次，改写矩阵$\mathbf{H}^*(\vec{L})$为：

$$\mathbf{H}^*(\vec{L})=\left(\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&0&0\\\frac{1}{4}&0&0\\0&\frac{1}{4}&0\\0&\frac{1}{4}&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&0&0\\\frac{1}{4}&0&0\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{4}&0\\0&\frac{1}{4}&0\end{bmatrix}\right),\mathbf{I}^*(\vec{L})=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$\vec{L}$上的置换群为P_3^2，属于 6 阶置换群，包含 720 个置换。$\mathbf{I}^*(\vec{L})$是批次单位矩阵，显然$\mathbf{x}\cdot\mathbf{I}^*(\vec{L})$对不同的$\mathbf{x}$的取值不会产生效用上的差异。显然偏好结构赋权批次矩阵可以被表示为若干行变换矩阵与$\mathbf{I}^*(\vec{L})$作用的结果。例如对$\mathbf{H}^*(L_1)$，可得到$\mathbf{H}^*(L_1)$的一个行变换连乘表示：

$$\mathbf{H}^*(L_1){:}\,E[3,2(-1)]E[4,2(-1)]E\big(1,3(1)\big)E\big(2,3(1)\big)E\big(5,3(1)\big)E\big(6,3(1)\big)$$

$$E[3(-1)]E[4(-1)]E\big(3,5(1)\big)E\big(4,5(1)\big)E\left[3\left(-\frac{1}{2}\right)\right]E\left[4\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\mathbf{I}^*(\vec{L})$$

这里采用了初等行变换的表示方法，$E[i,j(k)]$表示使被左乘矩阵第i行加上第j行乘以k倍的作用矩阵；$E[i(k)]$表示使被左乘矩阵第i行乘以k倍的作用矩阵；$E[i,j]$表示使被左乘矩阵第i行与第j行交换的作用矩阵。

由于$\vec{U}=\ln\mathbf{x}\cdot(\mathbf{P}\cdot\mathbf{H}^*)$，考虑到$\sum U=\vec{U}\cdot\vec{1}^T$，向量$\vec{U}$各分量对总效用的贡献是均等的，故使各商品购买数量具有不同权重的唯一因素在于矩阵$\mathbf{P}\cdot\mathbf{H}^*$，对于消费者$L_1$有效用向量：

$$\vec{U}=\ln\mathbf{x}\cdot\mathbf{P}\cdot E[3,2(-1)]\,E[4,2(-1)]\,E\big(1,3(1)\big)E\big(2,3(1)\big)E\big(5,3(1)\big)E\big(6,3(1)\big)$$

$$E[3(-1)]E[4(-1)]E\big(3,5(1)\big)E\big(4,5(1)\big)E\left[3\left(-\frac{1}{2}\right)\right]E\left[4\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\mathbf{I}^*(\vec{L})$$

采用$E(\sim)$表示初等行变化矩阵的连乘，同时可将$\mathbf{P}$分解为对换$P(i,j)$之连乘积矩阵$P(\sim)$，$P(\sim)\cdot E(\sim)$是产生商品购买权重差异的唯一因素的另一种表示方法。保效用问题实际是$P(\sim)\cdot E(\sim)$之积矩阵对置换P^*的分类问题。考虑$P(\sim)\cdot E(\sim)=P(\sim)\cdot P(i,j)\cdot E[3,2(-1)]\cdot E(\sim)$，其中等式右边的$E(\sim)$为连乘式中剩余的初等行变换矩阵，等式左边的$P(\sim)$为连乘式中剩余的对换置换矩阵，$P(i,j)$为交换第$i$列和第$j$列的对换置换矩阵。$E[3,2(-1)]$涉及到$P(i,j)$的第 2 列和第 3 列的变动，这意味着$P(2,3)$和$P(3,2)$会改变当前积矩阵的结果，而$P(i,j)(i,j\neq 2,3,i\neq j)$则均不会改变结果，这里用 3×3 矩阵作个示例：

$$P(2,3)\cdot E[3,2(-1)]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&1&0\end{bmatrix}=P(3,2)\cdot E[3,2(-1)]$$

如若$P(i,j)$不涉及到第 2,3 列的变换，所有满足该约束条件的积矩阵$P(i,j)\cdot E[3,2(-1)]$是效用意义上相同的，因此这里产生一个基于能否保持效用的对置换群P_3^2的初步分类。进一步地，紧随$E[3,2(-1)]$的$E[4,2(-1)]$涉及到积矩阵第 2 列和第 4 列的变动。仿照$P(i,j)$与$E[3,2(-1)]$的讨论，如若$P(i,j)$左边的$P(k,l)$不涉及到第 2,4 列的变换，所有满足该约束条件的积矩阵$P(k,l)\cdot P(i,j)\cdot E[3,2(-1)]\cdot E[4,2(-1)]$是效用意义上相同的，由此导出一个基于能否保持效用的对置换群P_3^2的第二个分类。

4.基于等效用决策（分类）个数的消费者个体的次优购买决策的数量分析

由于连乘式$E(\sim)$包含 12 个初等行变换矩阵，故可导出$E(\sim)$上的 12 个分类，分类数目显然与偏好赋权结构矩阵$\mathbf{H}^*$所包含的偏好类型的数目与结构相关，例如，P_3^2相比P_3^1具有 2 倍的分类数目（初等变换矩阵个数），P_3^3相比P_3^1具有 3 倍的分类数目，类推知P_m^N的分类个数为$N\cdot P_m^1$。

每个分类将置换群P_m^N划分为两部分，其中一部分对当前所右乘的积矩阵保效用，另一部分则不保效用，这两部分的比例因初等行变换矩阵的类型而已，当初等行变化矩阵为$E[i,j(k)]$或$E[i,j]$时，该比例为：

$$\frac{P_{m-2}^N}{P_m^N}=\frac{(m\times N-2\times N)!}{(m\times N)!}$$

当初等行变化矩阵为$E[i(k)]$时，只涉及到一行，该比例提升到：

$$\frac{P_{m-1}^N}{P_m^N} = \frac{(m \times N - N)!}{(m \times N)!}$$

每一次分类，$P_m^N - P_{m-2}^N$或$P_m^N - P_{m-1}^N$表示不保效用的置换个数，考虑初等行变化矩阵均为$E[i,j(k)]$或$E[i,j]$，则对于所有分类，不保效用的置换所占的比例为：$\frac{\sum_{i=3}^{m} P_i^N - P_{i-2}^N}{P_m^N}$，该比例显示随着商品种类增多或批次增多（购买决策的数量分配更加细化）而降低，也即随着参与购买决策的商品种类增多和购买量粒度更细，消费者会获得更大的消费决策的自由空间，使其在保持享受程度（效用）不变下可以有多个选择，这意味着，若消费者的商品购买组合所预期的效用偏离了唯一的最优效用，将出现多组等效用的商品购买组合可供选择。

四、多消费者多偏好多商品场景下多个次优购买决策中寻求最优的方式：世界商品优先

1.基于健壮性指标对消费者个体的多个次优购买决策求最优的分析

多个等效用的消费决策要求理性消费者引入新的优化函数来收敛到一个确定的选择，笔者认为消费者对未来的效用预期可以作为这个新的优化函数，同时假设消费者的未来预期是短视的，其只会预测下一期的效用预期而不会更远。本文开头提到，市场上流通的商品假设为数量和价格迅速调整的，尽管本文未设置企业部门来量化数量和价格的变动机制，但消费者仍将考虑到由于商品的弹性不同，商品数量缩减的速度不一致，这会使消费者已定的消费决策在未来不得不重新调整——不再是最优的。

对这个潜在风险的解决方案是，对目前等效用的多个方案按照一个健壮性指标（对商品数量价格的调整具有抗性的）进行排序，选取最具稳健性的商品购买组合作为最终的消费决策，以最小化这种风险。

开头已提到区分商品的唯一特征是价格弹性，商品的数量和价格只要确定了一个另一个也被立即确定，因此商品成本相较于消费者群体总体上是静态数额，并不适宜作为一个手动调整观察消费者群体反应的变量。本文认为可以设计虚拟的单个消费者突然加入或退出消费者群体，作为微扰量研究消费者群体的反应。例如，对于一类共享偏好结构的包含P个消费者的消费者群体，现临时加入d个消费者（d可以为负值表示d个消费者退场），每一类商品Q_i的供应总量不变，每个消费者个体的购买向量为$\vec{X}_i = (X_{1i}X_{2i}\cdots X_{mi})$。

2.基于微扰法对消费者个体的消费总成本的示例分析

以消费者L_1为模板生成示例消费者群体，则消费者群体的购买矩阵（不同于支付能力矩阵 **L**）为：

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & \cdots & X_{1P} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & \cdots & X_{2P} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & \cdots & X_{3P} \end{bmatrix}$$

消费者群体的两种微扰扩张矩阵表示分别加入了d个消费者以更改购买矩阵：

$$\mathbf{X} + d = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & \cdots & X_{1P}\cdots & X_{1(P+d)} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & \cdots & X_{2P}\cdots & X_{2(P+d)} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & \cdots & X_{3P}\cdots & X_{3(P+d)} \end{bmatrix}$$

以Q_1为例，若$\mathbf{X}$的第一行$\mathbf{X}[1] = [2,2,3,4,2,2]$，即 6 个消费者对商品$Q_1$的购买情况，考虑加入虚拟消费者是为了微扰市价，故$d$关键在于表示出新增的购买数，设$d = 3$，有$\mathbf{X}[1] + 3 = [2,2,3,4,2,2,3]$，假设$Q_1$的价格弹性$k_1 = 5$，未微扰时$Q_1$价格$P_1 = 3$，市场对新增需求迅速调整价格为$\frac{18}{5} = 3.6$，价格调整对不同购买组合的成本负担是不同的，尽管价格调整比例统一为$\frac{3.6-3}{3} = 20\%$，对消费者L_1, L_2, L_5, L_6而言负担为$2 \times 20\% = 0.4$，对消费者L_3而言负担为$3 \times 20\% = 0.6$，对消费者L_4而言负担为$3 \times 20\% = 0.8$，购买决策过分偏重某一项商品会在该商品市价变动时对预期效用的实现造成较大风险。因此可以基于微扰设计健壮性指标。

考虑另一种政策性的而非市场性的价格干预——关税。同样预设商品Q_1，Q_1的价格弹性k_1，Q_1的未微扰价格为$\frac{Q_1}{k_1}$，Q_1的市场微扰价格为$\frac{Q_1}{k_1} + \frac{d}{k_1}$，$Q_1$的关税微扰价格为$\frac{Q_1}{k_1} + \frac{Q_1}{t_1}(\mathbf{T}_Q)$或$\frac{Q_1}{k_1} + \frac{t_1 \cdot Q_1}{k_1}(\mathbf{T}_P)$。由于本文的背景是世界市场，关税干预和微扰干预对成本变动的影响力是否是不同的，两种干预是否可以相互重叠是设

计基于微扰的健壮性指标的重要问题。

3.两种微扰量（市场微扰和关税微扰）的比较和叠加作用分析

微扰为随机数量，分别假设两种微扰采样自分布F_d（市场微扰）和F_t（关税干预）且这两种分布满足：

$$\begin{cases} Cov(d_i,d_j)=0, Cov(d_i,t_j)=0, E(d)=\dfrac{d}{k_1}(\mathbf{d}) \\ Cov(t_i,t_j)=0, E(t)=\dfrac{Q_1}{t_1}(\mathbf{T}_Q) \\ Cov(t_i,t_j)=0, E(t)=\dfrac{t_1\cdot Q_1}{k_1}(\mathbf{T}_P) \end{cases}$$

对单个消费者如L_1，购物成本为各商品价格弹性乘以数量的平方，形式为一个椭圆形方程（前文使用向量形式和约束方程表示购物成本，这里出于问题需要修改了表示形式）：

$$\frac{Q_1^2}{k_1}+\frac{Q_2^2}{k_2}+\cdots+\frac{Q_m^2}{k_m}=C$$

分别代入市场微扰和两种关税微扰得到新的椭圆形方程：

$$\frac{\left(Q_1+\frac{d_1}{2}\right)^2}{k_1}+\frac{\left(Q_2+\frac{d_2}{2}\right)^2}{k_2}+\cdots+\frac{\left(Q_m+\frac{d_m}{2}\right)^2}{k_m}=C+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{m}\frac{d_i^2}{k_i}(\mathbf{d})$$

$$\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{t_1}\right)Q_1^2+\left(\frac{1}{k_2}+\frac{1}{t_2}\right)Q_2^2+\cdots+\left(\frac{1}{k_m}+\frac{1}{t_m}\right)Q_m^2=C(\mathbf{T}_Q)$$

$$\frac{Q_1^2}{\frac{k_1}{t_1}}+\frac{Q_2^2}{\frac{k_2}{t_2}}+\cdots+\frac{Q_m^2}{\frac{k_m}{t_m}}=C(\mathbf{T}_P)$$

从成本的椭圆形方程的数学形式可以观察到市场微扰和关税微扰的基本区别，市场微扰视为整个超椭球的位移和拉伸；而关税微扰均为对超椭球的拉伸。这是区别两类微扰的一个很重要的数学区别：椭球形方程是指满足成本约束线的若干购买组合的解（实际上还限制到第一卦限使各商品购买量至少不为负数），关税微扰和价格弹性相类似，影响单位商品成本的变动；市场微扰将椭球沿着每种商品购买量的坐标轴的负方向平移，同时也存在一定的对单位商品成本的影响（椭球拉伸）。

因此市场微扰的性质的确与关税微扰不同，两种微扰可以相互重叠（向右上方平移+伸长的拉伸）造成较大的成本约束的变动，也可以相互抵消（向左下方平移+伸长的拉伸）造成较小的成本约束线变动。

那么，是否存在一些特殊条件，使得市场微扰可以充分抵消关税微扰带来的成本约束线的变动？如果这些特殊条件的确存在，那么在消费者的最优消费决策方案中，评价多个等效用购买组合的稳健性指标就可以设计为：购买组合所包含的商品种类是否具有这类特殊条件？以及这种特殊条件造成的效用有多大？

该类商品购买量越多，为该类商品支出的成本相比较于为其余类商品支出的成本便是稳健、不易变动的，那么稳健性指标就愈加侧重这类商品。借助这个稳健性指标，消费者可从一系列等效用购买组合中确定稳健性最优的购买组合，甚至形成对这个最稳健购买组合的稳定消费习惯。

这里笔者回到文题，本文研究世界商品涌现对关税限制的健壮性，世界商品是什么样的商品？在这个主题下世界商品就是一类具有抵消关税的成本效应的特殊条件的商品，只要这类商品的确具备这种特殊条件，就容易受追求长期稳定消费的各国消费者们所青睐而涌现为普遍的世界商品。

五、世界商品的价格弹性特性分析

1.两种微扰量（市场微扰和关税微扰）的抵消效应与商品价格弹性关系的分析

为了观察市场微扰和关税微扰的抵消效应，将这两种微扰合并到同一个椭圆形方程：

$$\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{t_1}\right)\left(Q_1+\frac{d_1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{k_2}+\frac{1}{t_2}\right)\left(Q_2+\frac{d_2}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{k_m}+\frac{1}{t_m}\right)\left(Q_m+\frac{d_m}{2}\right)^2=C+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{m}d_i^2\left(\frac{1}{k_i}+\frac{1}{t_i}\right)(\mathbf{T}_Q\&\mathbf{d})$$

$$\frac{\left(Q_1+\frac{d_1}{2}\right)^2}{\frac{k_1}{t_1}}+\frac{\left(Q_2+\frac{d_2}{2}\right)^2}{\frac{k_2}{t_2}}+\cdots+\frac{\left(Q_m+\frac{d_m}{2}\right)^2}{\frac{k_m}{t_m}}=C+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{m}d_i^2\frac{k_i}{t_i}(\mathbf{T}_P\&\mathbf{d})$$

由于$\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{m}d_i^2(\sim)$为一个对各商品项扰动的求和，简记为$\sum d(\sim)$，重新表示模型：

$$C+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{m}d_i^2\left(\frac{1}{k_i}+\frac{1}{t_i}\right)=C\cdot\left(1+\frac{\sum d(\mathbf{T}_Q)}{C}\right),\ C+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{m}d_i^2\frac{k_i}{t_i}=C\cdot\left(1+\frac{\sum d(\mathbf{T}_P)}{C}\right)$$

$$\frac{\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{t_1}\right)}{1+\frac{\sum d(\mathbf{T}_P)}{C}}\left(Q_1+\frac{d_1}{2}\right)^2+\frac{\left(\frac{1}{k_2}+\frac{1}{t_2}\right)}{1+\frac{\sum d(\mathbf{T}_P)}{C}}\left(Q_2+\frac{d_2}{2}\right)^2+\cdots+\frac{\left(\frac{1}{k_m}+\frac{1}{t_m}\right)}{1+\frac{\sum d(\mathbf{T}_P)}{C}}\left(Q_m+\frac{d_m}{2}\right)^2=C(\mathbf{T}_Q\&\mathbf{d})$$

$$\frac{\left(Q_1+\frac{d_1}{2}\right)^2}{\frac{k_1}{t_1}\left(1+\frac{\sum d(\mathbf{T}_P)}{C}\right)}+\frac{\left(Q_2+\frac{d_2}{2}\right)^2}{\frac{k_2}{t_2}\left(1+\frac{\sum d(\mathbf{T}_P)}{C}\right)}+\cdots+\frac{\left(Q_m+\frac{d_m}{2}\right)^2}{\frac{k_m}{t_m}\left(1+\frac{\sum d(\mathbf{T}_P)}{C}\right)}=C(\mathbf{T}_P\&\mathbf{d})$$

这里重新将椭圆形方程的右边变为原成本项，将左边各项商品成本标准化，考虑标准化单项成本为：

$$\mathbf{T}_Q\colon\ \frac{\left(\frac{1}{k_i}+\frac{1}{t_i}\right)}{1+\frac{\sum d(\mathbf{T}_P)}{C}}\left(Q_i+\frac{d_i}{2}\right)^2,\quad \mathbf{T}_P\colon\ \frac{\left(Q_i+\frac{d_i}{2}\right)^2}{\frac{k_i}{t_i}\left(1+\frac{\sum d(\mathbf{T}_P)}{C}\right)}$$

首先考虑$\mathbf{T}_Q$，要考察成本约束线上每个商品购买组合的成本变动是较为困难的，因此考虑一种极端情况：消费者全部购买了此类商品而未购买其他类别的商品，因此成本计算可全部在这类商品Q_i上计算，因此引入上面的标准化单项成本来计算这种极端情况下的总成本。

将这种极端情况转化为几何直观为：商品购买组合落到空间中Q_i对应的坐标轴上，其余坐标值（其他类别的商品的购买量）皆为零。因此抵消效应可表示为坐标向负方向平移和椭圆整体向正方向拉伸：

$$l=\sqrt{\frac{k_it_i}{k_i+t_i}\left(1+\frac{\frac{d_i}{4}\frac{k_i+t_i}{k_it_i}}{C}\right)}-\frac{d_i}{2}=\sqrt{k_i\left(1+k_it_i^{-1}\right)^{-1}+\frac{d_i^2}{4C}}-\frac{d_i}{2}$$

l表示市场微扰对关税微扰抵消后剩余的量，几何直观上为椭球轴长减去椭球平移长度。使$l=f(t_i)$，$\frac{df(t_i)}{dt_i}>0$ 显然l基本随t_i增大而增大，从量税$\mathbf{T}_Q$越高税费越低，这里使$C=1$，则只要$k_i\left(1+k_it_i^{-1}\right)^{-1}>0$ 即可使剩余量大于零，关税微扰效应压过市场微扰影响单位商品成本，需要考虑开方函数的边际递减机制，足够大的弹性k_i可以使关税微扰的每一步加大带来的正效应都更微弱从而提升市场微扰的效用。

该种讨论情况对任意全部购买单个商品的商品购买组合使用，那么涉及到非极端情况的商品购买组合呢？笔者认为这其中的计算过于复杂，本文的论证中心在于世界商品的形成机制，而不讨论过于复杂的消费者决策细节的数值问题，单个商品的极限情况足以展示商品的价格弹性大小对抵消效应大小的影响。

类同$\mathbf{T}_Q$展开对$\mathbf{T}_P$的分析，有两种扰动的剩余效应的从价税情形下的表达式：

$$l=\sqrt{\frac{k_i}{t_i}\left(1+\frac{\frac{1}{4}d_i^2\frac{k_i}{t_i}}{C}\right)}-\frac{d_i}{2}=\sqrt{k_it_i^{-1}+\frac{k_id_i^2}{4C}t_i^{-2}}-\frac{d_i}{2}$$

l表示市场微扰对关税微扰抵消后剩余的量，几何直观上仍旧为椭球轴长减去椭球平移长度。使$l=f(t_i)$，$\frac{df(t_i)}{dt_i}<0$，显然l基本随t_i增大而减小，从价税$\mathbf{T}_P$越大税费越高，这里的结论与两种关税的特性基本符合，使$C=1$，只需$k_it_i^{-2}>1\left(t_i<\sqrt{k_i}\right)$即可使剩余量大于零，关税微扰效应压过市场微扰影响单位商品成本，

考虑到函数$f(t_i)$的单调性，可使k_i变得足够大将关税微扰效应压过市场微扰的临界点离$t_i \approx 0$位置更远，从而使关税微扰更难以超越市场微扰的抵消效应。

六、结论与不足：

足够大的商品弹性k_i可使市场微扰对无论是从量税微扰$\mathbf{T}_Q$还是对从价税微扰$\mathbf{T}_P$都具有更大的抵消效果，这就是健壮性指标所寻找的“特殊条件”，对商品弹性k_i很大的商品，购买量越多，该类商品支出的成本相比较于为其余类商品支出的成本，在两种关税（从量税和从价税）的微量变动下，便越是稳健、不易变动的。基于商品弹性k_i的稳健性指标，消费者从一系列等效用购买组合中确定稳健性最优的购买组合，高价格弹性商品在此类稳健性最优购买组合中会更为优先选择，长期过程中，消费者群体会形成对这个最稳健购买组合的稳定消费习惯。

本文仍有许多不足之处，有关双消费者的最优化购买决策的冲突部分是基于个例展开的讨论，并不具有一般性，也不清楚更多消费者更多商品更复杂偏好结构的情景下最优化决策产生冲突的冲突空间大小；有关价格弹性与两种微扰的抵消效应的关系的讨论较为简单，且仅为全部购买单商品的极端情况分析，未能分析多种不同类型商品购买时，受微扰的总成本变动中的复杂细节，需要对此开发更完善的数学工具、模拟手段，以确定世界商品的稳健性能否在更复杂情境下继续保持。

[参考文献]

Cubitt, R.P., Read, D. Can intertemporal choice experiments elicit time preferences for consumption?. Exp Econ 10, 369–389 (2007).

吴颖敏. 市场机遇发现的超图支持方法研究[D].华中科技大学,2009.

Chipman, J.S. Multiple equilibrium under CES preferences. Econ Theory 45, 129–145 (2010).